Ueber

das Princip der Partition

in Beziehung auf die Ermittlung der absoluten Störungen der kleinen Planeten und die durch Anwendung elliptischer Functionen hiebei zu erreichenden Vorteile.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

von der

philosophischen Facultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

ACAD. LUDOVICIANA BIBL.

genehmigt

und

öffentlich zu vertheidigen

am

Donnerstag den 12. August Mittags 12 Uhr

von

Arnold Leman
aus Breslau.

I. Teil.

Opponenten:

Otto Jesse, Astronom.
Leo Grunmach, cand. phil.
Herrmann Wiebe, cand. phil.

Berlin 1880.
A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade), Stallschreiberstrasse 47.

G 185

I.

In einem Aufsatze im XIV. Bande des Bulletin de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg deutet Gyldén ein besonderes Verfahren zur Ermittlung der absoluten Störungen eines Cometen an, das sich auf die Einführung elliptischer Functionen stützt. In einem späteren Aufsatze: „Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie" betitelt, von dem jedoch zur Zeit erst ein Teil veröffentlicht ist, soll das in der ersteren Abhandlung nur in den äussersten Umrissen gegebene Verfahren weiter entwickelt und zur praktischen Anwendung geeignet gemacht werden. Für den letzteren Zweck, insbesondere für die Ausbildung der Ausdrücke, durch deren Integration die Störungen selbst erhalten werden, ist jedoch in dem bereits veröffentlichten Teile der genannten Abhandlung noch nichts geschehen, vielmehr beschäftigt sich derselbe, seinem besonderen Titel entsprechend, vorerst nur mit der Entwicklung einiger Verbindungen elliptischer Functionen, von denen voraussichtlich später Gebrauch zu machen sein wird. Die Gyldén'sche Arbeit basirt wesentlich auf dem von Hansen in seiner Pariser Preisschrift dargelegten Verfahren, die absoluten Störungen eines Cometen zu berechnen und beabsichtigt eine Verbesserung desselben mit dem Hinweis, dass durch die Einführung elliptischer Functionen eine Vergrösserung der Convergenz der einzelnen Ausdrücke erzielt wird. Es scheint jedoch, bevor das neue Verfahren in seinem ganzen Umfange ausgearbeitet vorliegen wird, nicht wol möglich, ein Urteil darüber zu gewinnen, ob in der Tat der beabsichtigte Zweck erreicht wird, oder ob nicht durch die Mehrarbeit, die durch die Einführung der höheren Transcendenten erwächst, der Vorteil der grösseren Convergenz wieder aufgehoben wird.

Eine andere Frage indess, deren Beantwortung schon jetzt möglich erscheint, ist die, ob die in Rede stehende Methode, d. h. wesentlich die Hansen'sche Methode der Partition, sei es mit oder ohne die Einführung elliptischer Functionen in der von Gyldén beabsichtigten Weise, auch für die Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten anwendbar ist, resp., da diese allgemeine Frage wol unmittelbar bejaht werden kann, ob die Anwendung dieser Methode im Allgemeinen

oder doch vielleicht in manchen Fällen Vorzüge vor den beiden anderen von Hansen in den beiden Abhandlungen: „Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode u. s w.“ und „Entwicklung der negativen und ungraden Potenzen u. s. w.“ gegebenen Verfahren darbietet. Diese beiden Methoden sind zwar für alle Fälle ausreichend; es zeichnet sich aber besonders die letztere durch Eleganz der Entwickelungen und Symmetrie der einzelnen Operationen vor der anderen aus und bietet vor Allem den Vorteil, dass ein grosser Teil der Entwicklungscoëfficienten unabhängig von den Elementen des störenden sowol als des gestörten Planeten ist, also ein für alle Mal berechnet werden kann, und von Hansen schon in einer Tafel seiner angeführten Arbeit beigegeben ist; ein anderer Teil nur von der Excentricität des störenden Planeten abhängt und daher, da die säcularen Aenderungen derselben nur sehr kleinen Einfluss haben, ebenfalls für einen grossen Zeitraum nur einmal berechnet zu werden brauchen. Diese Methode beruht jedoch auf der Entwicklung der Störungsfunction nach Potenzen des Verhältnisses der grossen Achsen der beiden Planeten zu einander und wird in der Anwendung unbequem, wenn dieses Verhältniss einigermassen grösser wird als $^1/_2$. Für die Berechnung der Saturnstörungen ist dieselbe daher immer anwendbar und scheint den unbestrittenen Vorzug vor allen anderen Verfahren zu verdienen, für die Berechnung der viel wichtigeren Juppiterstörungen dagegen wird unter allen Umständen die Convergenz eine bei Weitem schwächere und es treten häufig Fälle ein, in denen die Anwendung überhaupt nicht mehr ratsam erscheint.

Das andere Verfahren beruht auf der unmittelbaren Entwicklung der Störungsfunction und ihrer Derivirten nach den Vielfachen eines Winkels $E' - F$, wo E' die excentrische Anomalie des störenden Planeten, F eine Function der excentrischen Anomalie des gestörten Körpers bedeutet. Die Entwicklungscoëfficienten werden dabei Functionen der letzteren Grösse, man hat also schliesslich die mechanische Quadratur anzuwenden, um die Störungsfunction als eine nach dem Argumente $iE - i'E'$ geordnete Reihe zu erhalten. Es ergeben sich zwar hierbei auch Coëfficienten, die von den Bahnelementen unabhängig sind, doch ist deren Anwendung keine so sehr einfache wie bei der anderen Methode.

Der wesentlichste Unterschied beider Methoden liegt darin, dass die zuerst berührte systematischer zu Werke geht, und es ermöglicht, nachdem ein Teil der Operationen ganz allgemeingiltig durchgeführt ist, das Resultat für den speciellen Fall durch nachträgliche Einführung der demselben eigenen speciellen Werte der unbestimmt gelassenen Grössen zu erhalten, während bei den anderen von vorn herein nach den speciellen Werten gerechnet werden muss. Es erscheint nun nicht unmöglich, dass die Anwendung des Princips der Partition Hilfsmittel bietet, auch für die Fälle wo das obige systematischere Verfahren nicht anwendbar ist, Entwicklungen zu erhalten, die nachträgliches Einführen specieller Werte von anfänglich unbestimmt gelassenen Grössen gestattet und somit ähnliche Vorteile bietet wie jenes.

Bei einem nur oberflächlichen Ueberblick über die Hansen'sche Pariser Preisschrift erscheint diese Hoffnung allerdings nur wenig Aussicht auf Erfolg zu bieten, denn diese Arbeit behandelt das Problem in so mannichfaltigen Modificationen, dass es den Anschein gewinnt, als ob dasselbe überhaupt nur dann zur practischen Verwendung kommen könne, wenn für einen speciellen Fall eine zweckmässige Auswal unter den verschiedenen nie notwendig gleichzeitig zur Verwendung kommenden Regeln getroffen worden ist. Beachtet man jedoch, dass die Methode von Hansen ausschliesslich für Cometenstörungen bestimmt ist, und dass nur um allen denkbaren Fällen gerecht zu werden eine so umfassende Behandlung der Aufgabe erforderlich war, so wird es wahrscheinlich, dass es bei der Anwendung auf die Störungen der kleinen Planeten, wo von vorn herein eine grosse Beschränkung eintritt, möglich werden dürfte, durch Specialisation eine bestimmte, für alle giltige Rechnungsvorschrift zu erlangen.

Hansen beginnt seine Abhandlung mit der Auseinandersetzung, wie man durch Einführung einer neuen Veränderlichen, die er partielle Anomalie nennt, die elliptische Bahn des Cometen in zwei Teile zerlegen kann, in deren jedem die Störungen für sich berechnet werden, wobei die beiden Teilpunkte willkürlich gewählt werden können, unter der einzigen Beschränkung, dass sie auf verschiedenen Seiten der grossen Achse liegen müssen. Er zeigt sodann weiterhin, wie man diese Teilung noch weiter fortsetzen kann, indem man in einen oder beide Endpunkte der grossen Achse neue Teilpunkte verlegt, und giebt schliesslich auch noch Formeln, durch welche die Teilung so bewerkstelligt werden kann, dass zwei oder mehr Teilpunkte auf derselben Seite der grossen Achse beliebig angeordnet werden.

Die letzteren Formeln geben nur ein Hilfsmittel ab, für den Fall, dass die Bahnen des Cometen und des störenden Planeten einander sehr nahe kommen, aus der ersteren in der Nähe des Minimums der Entfernung ein Stück auszutrennen und besonders zu behandeln, in dem die Störungen besonders gross werden uud sogar noch für den Fall, dass die beiden Bahnen sich schneiden und bei etwaigem Zusammentreffen der beiden Himmelskörper im Schnittpunkte die Bahn des Cometen ganz umgeworfen werden kann, bis zu diesem Zeitpunkte hin die Störungen genau verfolgen zu können.

Bei den kleinen Planeten tritt dieser Fall überhaupt nicht ein, die entsprechenden Formeln werden daher sogleich unberücksichtigt bleiben können, aber auch unter den ersteren wird noch eine grosse Beschränkung Platz greifen können. In dem oben erwähnten älteren Aufsatze giebt Gyldén einige numerische Entwicklungen, die sich auf die Juppiterstörungen des Encke'schen Cometen beziehen. Aus denselben geht hervor, dass schon eine blosse Zweiteilung der Bahn des Cometen genügt haben würde, recht convergente Reihenentwicklungen zu erzeugen. Beachtet man nun, dass von den kleinen Planeten nur wenige dem Juppiter ebenso nahe oder noch näher kommen können als der Encke'sche Comet, dass aber die

Excentricität des Cometen mehr als doppelt so gross ist, als die eines jeden der bis jetzt bekannten kleinen Planeten, mit Ausschluss eines einzigen, dessen Elemente aber noch sehr unsicher sind, so wird es sehr wahrscheinlich, auch bei einer Gruppe der kleinen Planeten mit einer einfachen Zweiteilung auszureichen, bei einer anderen eine Drei- oder Vierteilung eintreten zu lassen, und zwar in der Art, dass bei allen Gliedern einer jeden Gruppe die Teilung in derselben Weise vorgenommen wird. Es lässt sich nicht leugnen, dass bei einer derartigen summarischen Behandlungsweise des Problems nicht gerade die für jeden einzelnen Fall denkbar zweckmässigsten Resultate erhalten werden, es ist aber andrerseits nicht zu übersehen, dass sich von vorn herein nicht entscheiden lässt, welche Art der Einteilung der Bahn im einzelnen Falle die beste ist, und es vielmehr dem Gefühl des Rechners überlassen bleiben muss, eine gute Anordnung zu treffen. Erfahrungen können über den Gegenstand nicht wol vorliegen, da überhaupt eine Anwendung des Verfahrens der Partition auf die kleinen Planeten meines Wissens noch nicht gemacht worden ist; sollte sich indess herausstellen, dass die beabsichtigten Einschränkungen einer wesentlichen Modification bedürften, so wird doch vielleicht der Grundgedanke nicht gänzlich zu verwerfen sein, und es desfalls nur einer weiteren Gruppeneinteilung der zalreichen Schar der kleinen Planeten bedürfen, für deren jede dann eine allgemeine Art der Teilung der Bahn ausreichend sein wird. Ohne indess befürchten zu müssen, allzu vorschnell zu urteilen, scheint es doch unter allen Umständen zulässig, zwei der Teilpunkte symmetrisch zur grossen Achse der Ellipse anzuordnen, wodurch sämmtliche Formeln ganz besonders einfach gestaltet werden.

II.

Um vorerst überhaupt einmal in das Wesen der Sache einzutreten, soll zunächst nur die Zweiteilung betrachtet werden; aus den Schlüssen und Folgerungen, die sich daran knüpfen werden, wird es dann leicht sein, ein Urteil zu gewinnen, ob dieselbe überhaupt ausreichend sein wird, oder ob man vielleicht gleich von vorn herein eine grössere Anzal von Teilpunkten wird annehmen müssen.

Sind r' und r'' die den beiden Teilpunkten zukommenden Radienvectoren, so setzt Hansen im unteren Teil der Bahn

$$\sin \tfrac{1}{2} E = k \,(\cos X \sin \omega + \sin X)$$

im oberen

$$\cos \tfrac{1}{2} v = k_1 \,(\cos X_1 \sin \omega_1 + \sin X_1)$$

wo ω und ω_1 die partiellen Anomalien für den unteren resp. oberen Teil der Bahn, k, k_1, X und X_1 Constanten sind, die sich aus den Formeln ergeben:

$$k = \sqrt{\frac{r'+r''-2a(1-e)}{4ae}}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{a(r'+r'')(1+e)-2r'r''}{4er'r''}(1-e)}$$

$$\operatorname{tg}(45^0 - X) = \sqrt{\frac{r''-a(1-e)}{r'-a(1-e)}}$$

$$\operatorname{tg}(45^0 - X_1) = \sqrt{\frac{a(1+e)-r'}{a(1+e)-r''}\cdot\frac{r''}{r'}}.$$

Hat man mit Hilfe dieser Formeln, die sich noch mannichfach umgestalten lassen, die Constanten berechnet, dann erhält man im unteren Teile der Bahn

$$r = a(1 - e + ek^2 + ek^2 \sin^2 X) + 2aek^2 \sin 2X \sin\omega - aek^2 \cos^2 X \cos 2\omega$$

$$r\cos v = a(1 - e - k^2 - k^2 \sin^2 X) - 2ak^2 \sin 2X \sin\omega + ak^2 \cos^2 X \cos 2\omega$$

$$r \sin v = 2ak^2 \cos\varphi(\cos X \sin\omega + \sin X)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 X - k^2 \sin 2X \sin\omega - k^2 \cos^2 X \sin^2\omega}$$

$$\frac{\mu dt}{d\omega} = \frac{r}{a}\frac{dE}{d\omega} = \frac{r}{a}\frac{2k\cos X\cos\omega}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 X - k^2 \sin 2X \sin\omega - k^2\cos^2 X \sin^2\omega}}$$

Im oberen Teile der Bahn wird dagegen:

$$r = \frac{a\cos^2\varphi}{1 - e + ek_1^2 + ek_1^2 \sin^2 X_1 - 2ek_1^2 \sin 2X_1 \sin\omega_1 - ek_1^2 \cos^2 X_1 \cos 2\omega_1}$$

$$\cos v = (k_1^2 + k_1^2 \sin^2 X_1 - 1) - 2k_1^2 \sin 2X_1 \sin\omega_1 - k_1^2 \cos^2 X_1 \cos 2\omega_1$$

$$\sin v = 2k_1(\cos X_1 \sin\omega_1 - \sin X_1)\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 X_1 + k_1^2 \sin 2X \sin\omega_1 - k_1^2 \cos^2 X_1 \sin^2\omega_1}$$

$$\frac{\mu dt}{d\omega_1} = \frac{r^2}{a^2\cos\varphi}\frac{dv}{d\omega_1} = -\frac{r^2}{a^2\cos\varphi}\frac{2k_1\cos X_1\cos\omega_1}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2 X_1 + k_1^2 \sin 2X_1 \sin\omega_1 - k_1^2\cos^2 X_1 \sin^2\omega_1}}$$

Mittels dieser Ausdrücke lassen sich nun sämmtliche in den Störungsgleichungen vorkommenden Glieder, welche die Zeit enthalten, in Reihen nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von ω resp. ω_1 fortschreitend entwickeln. Im unteren Teile sind daher die Wurzelausdrücke der beiden letzeren Formeln in entsprechende Reihen zu entwickeln, im oberen ausserdem auch noch r und r^2. Die Entwicklungen der Wurzelausdrücke für den allgemeinen Fall sind ausführlich von Hansen gegeben, der zunächst eine Recursionsformel zwischen drei aufeinanderfolgenden Coëfficienten ableitet, dann aber auch eine selbständige Entwicklung ausführt, weil die Recursionsformel nur theoretisch Interesse darbietet, zum praktischen Rechnen aber der Accumulation der Fehler wegen nicht wol verwendbar ist. Diese allgemeinen Entwicklungen können hier aber füglich übergangen werden, da, wie

eben gesagt, nur der specielle Fall in Betracht gezogen werden soll, dass r' und r'' einander gleich $= r_0$ sind. Hier erhält man

$$k = \sqrt{\frac{r_0 - a(1-e)}{2ae}}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{r_0\, a(1+e) - r^2_0}{2er^2_0}(1-e)} = \sqrt{\frac{r_0 - a(1+e)}{2er_0}(e-1)}$$

$$X = 0, \quad X_1 = 0$$

und im unteren Teile der Bahn

$$r = a(1 - e + ek^2) - aek^2 \cos 2\omega$$

$$r\cos v = a(1 - e - k^2) + ak^2 \cos 2\omega$$

$$r \sin v = 2ak \cos\varphi \sin\omega \sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega}$$

$$\frac{\mu dt}{d\omega} = \frac{r}{a} \sqrt{\frac{2k\cos\omega}{1 - k^2\sin^2\omega}}$$

im oberen aber

$$r = \frac{a\cos^2\varphi}{1 - e + 2k_1^2 - ek_1^2 \cos 2\omega_1}$$

$$\cos v = (k_1^2 - 1) - k_1^2 \cos 2\omega_1$$

$$\sin v = 2k_1 \sin\omega_1 \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\omega_1}$$

$$\frac{\mu dt}{d\omega_1} = -\frac{r^2}{a^2\cos\varphi} \sqrt{\frac{2k_1\cos\omega_1}{1 - k_1^2\cos\omega_1}}$$

Es erscheint nicht unzweckmässig, zunächst die Werte von k und k_1 etwas näher zu betrachten.

Die obigen sehr unsymmetrischen Ausdrücke lassen sich durch Einführung der excentrischen resp. wahren Anomalien leicht in folgender Weise umgestalten:

$$k = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{1}{2}E' + \sin^2\frac{1}{2}E''}{2}} \quad \text{oder} \quad k\cos X = \frac{\sin\frac{1}{2}E' + \sin\frac{1}{2}E''}{2}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{1}{2}v' + \cos^2\frac{1}{2}v''}{2}} \quad \text{oder} \quad k_1\cos X_1 = \frac{\cos\frac{1}{2}v' + \cos\frac{1}{2}v''}{2}$$

Für unseren speciellen Fall erhält man somit

$$k = \sin\tfrac{1}{2}E_0 \qquad k_1 = \cos\tfrac{1}{2}v_0$$

Eliminirt man aus den Ausdrücken

$$k^2 = \frac{r_0 - a(1-e)}{2ae} \quad \text{und} \quad k_1^2 = \frac{r_0 - a(1+e)}{2er_0}(e-1)$$

die Grösse r_0, so erhält man

$$\left(2ek^2 + (1-e)\right) \cdot \left(2ek_1^2 + (1-e)\right) = \cos^2\varphi,$$

eine Gleichung, die die Abhängigkeit der beiden Model k und k_i von einander ausdrückt.

Setzt man hierin $k = 0$, so wird

$$2\,e\,k_i^2 = \frac{\cos^2\varphi}{1-e} - (1-e) = 2\,e$$

$$k_i = 1$$

umgekehrt wird auch für $k_i = 0$ $k = 1$; beide Model sind daher stets echte Brüche. Aus der obigen Gleichung folgt ferner sofort, dass beide ihre relativ kleinsten gleichzeitigen Werte annehmen, wenn sie einander gleich sind, wenn also

$$k^2 = k_i^2 = \frac{\cos\varphi - (1-e)}{2\,e} = \tfrac{1}{2}\,(1 - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Der Wert von r_0, der hierzu gehört, ist

$$r_0 = a\cos\varphi\,.$$

Setzt man $k^2 = \frac{1}{2}$, so erhält man

$$k_i^2 = \frac{\cos^2\varphi - (1-e)}{2\,e} = \tfrac{1}{2}\,(1 - \sin\varphi),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}E_0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}};\quad E_0 = 90^0 \text{ und } 270^0,$$

d. h. die Teilung erfolgt in den Enden der kleinen Achse; setzt man $k_i^2 = \frac{1}{2}$, so wird

$$k^2 = \tfrac{1}{2}\,(1 - \sin\varphi),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}v_0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}};\quad v_0 = 90^0 \text{ und } 270^0,$$

d. h. die Teilung erfolgt in den Punkten der Bahn, deren Verbindungslinie durch die Sonne geht.

Vermittels dieser Formeln ist nun zunächst Δ^2 in eine nach den Vielfachen von ω fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Diese Grösse setzt sich, abgesehen von Coëfficienten, die nur von der gegenseitigen Lage der Bahnen des störenden und gestörten Körpers abhängen, also die Zeit nicht enthalten, aus den Ausdrücken r^2, $r\cos v$ und $r\sin v$, die nur von den Elementen des gestörten Körpers abhängen einerseits, und den analogen, die nur von den Elementen des störenden abhängen, zusammen. Letztere enthalten aber noch implicite die Zeit, die ihrerseits durch die Ausdrücke für $\frac{\mu\,dt}{d\omega}$ explicite durch die partielle Anomalie ausgedrückt ist, und durch deren Substitution, die vom störenden Körper abhängigen Glieder als Functionen der letzteren Variablen dargestellt werden können. Fasst man in erster Linie die nur von den Elementen des gestörten Körpers abhängenden Glieder ins Auge, so zeigt sich, dass deren Entwicklung in

Reihen nach den Vielfachen der partiellen Anomalie im unteren Teile der Bahn weit einfacher wird als im oberen, weil hier r sowol als das Product $r \cos v$ schon von vorn herein die geforderte Form haben und es also nur der Entwicklung von $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}$ bedarf, um auch sofort das Product $r \sin v$ in dieselbe zu bringen. Im oberen Teile dagegen hat nur der eine Factor $\cos v$ schon die herzustellende Form, auch liefert die Entwicklung der obigen Quadratwurzel nur die des Factors $\sin v$, der andere Factor r dagegen bedarf einer besonderen Entwicklung, da hier der die partielle Anomalie enthaltende Teil des Ausdruckes für v, als der reciproke Wert des entsprechenden Ausdruckes im unteren Teile erscheint. Hieraus scheint eine eigenthümliche Bevorzugtheit des unteren Teiles zu resultiren, diese ist jedoch nur scheinbar, denn es kommen in den Störungsgleichungen ausser den Producten $r \sin v$ und $r \cos v$, die im Quadrat der Entfernung enthalten sind, noch die Glieder $\cos v$ und $\sin v$ allein, sowie der Ausdruck $\frac{1}{r}$ vor, deren Entwicklung im unteren Teile der Bahn wieder mehr Arbeit verursacht als im oberen. Der Uebersichtlichtkeit wegen scheint es zweckmässig, die Besprechung der einzelnen Entwicklungen für beide Teile zu trennen und die für den oberen Teil giltigen vorauszunehmen; in Betreff der für den unteren wird sich dann teilweise auf die vorigen kurz verweisen lassen.

Nimmt man zunächst die Ausdrücke für r und r^2 vor, so ergiebt sich

$$r = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 - e + 2ek^2 \sin^2 \omega} = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 - e} \cdot \frac{1}{1 + y \sin^2 \omega}, \text{ wo } y = \frac{2ek^2}{1 - e}.$$

Es ist also $(1 + y \sin^2 \omega)^{-n}$ für $n = 1$ und $n = 2$ zu entwickeln. Allgemein ist

$$(1 + y \sin^2 \omega)^{-n} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} (-1)^\alpha \frac{(n + \alpha - 1)!}{(n - 1)!\ \alpha!} y^\alpha \sin^{2\alpha} \omega$$

$$\sin^{2\alpha} \omega = \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha}{}' (-1)^\beta S_\beta^{2\alpha} \cos 2\beta\omega, \text{ wo } S_\beta^{2\alpha} = \frac{(2\alpha)!}{(\alpha + \beta)!\,(\alpha - \beta)!\,2^{2\alpha-1}},$$

$S_0^{2\alpha}$ aber nur halb zu nehmen ist, was durch den Strich oben am Summenzeichen angedeutet werden soll, daher

$$(1 + y \sin^2 \omega)^{-n} = \sum_{\alpha=0,\ \beta=0}^{\alpha=\infty,\ \beta=\alpha}{}' (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(n + \alpha - 1)!}{(n - 1)!\ \alpha!} y^\alpha S_\beta^{2\alpha} \cos 2\beta\omega.$$

Fasst man jetzt alle Glieder zusammen, die einem bestimmten Werte von β entsprechen, so bilden dieselben eine nach dem Index α fortschreitende Reihe, deren Glieder mit dem gemeinschaftlichen von α unabhängigen Factor $(-1)^\beta \cos 2\beta\omega$ multiplicirt sind. Nimmt man diesen aus der Summe heraus, so wird deren allgemeines Glied

$$(-1)^\alpha \frac{(n + \alpha - 1)!}{(n - 1)!\ \alpha!} S_\beta^{2\alpha} y^\alpha.$$

In der obigen Doppelsumme durchläuft β alle Werte von 0 bis α, hat daher β einen bestimmten Wert, so muss α grösser und mindestens $= \beta$ sein, man erhält somit

$$(1+y\sin^2\omega)^{-n} = \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}{}'(-1)^\beta \cos 2\beta\omega \sum_{\alpha=\beta}^{\alpha=\infty}(-1)^\alpha \frac{(n+\alpha-1)!}{(n-1)!\ \alpha!} S_\beta^{2\alpha} y^\alpha = \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}{}'(-1)^\beta A'_\beta \cos 2\beta\omega.$$

Somit lauten die Reihenentwicklungen von r und r^2

$$r = \frac{a\cos^2\varphi}{1-e} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}{}'(-1)^\beta A_\beta \cos 2\beta\omega, \quad \text{wo } A_\beta = \sum_{\alpha=\beta}^{\alpha=\infty}(-1)^\alpha S_\beta^{2\alpha} \left(\frac{2ek^2}{1-e}\right)^\alpha$$

$$r^2 = \frac{a^2\cos^4\varphi}{(1-e)} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}{}'(-1)^\beta B_\beta \cos 2\beta\omega, \quad \text{wo } B_\beta = \sum_{\alpha=\beta}^{\alpha=\infty}(-1)^\alpha(\alpha+1) S_\beta^{2\alpha} \left(\frac{2ek^2}{1-e}\right)^\alpha.$$

Die Coëfficienten $S_\beta^{2\alpha}$ sind von den Bahnelementen unabhängig und lassen sich daher ein- für allemal berechnen und in Tafeln bringen, ihre Berechnung ist sehr einfach. Die Coëfficienten A_β und B_β werden dann durch Multiplication mit den fortschreitenden Potenzen von $\left(\frac{2ek^2}{1-e}\right)$ und nochmalige Summation erhalten. Dabei ist zu bemerken, dass die Coëfficienten A_β und B_β mit steigendem Werte von β zwar nothwendig abnehmen müssen, so dass die Convergenz in Bezug auf das Argument ω gesichert ist, dass aber die Coëfficienten $S_\beta^{2\alpha}$ nur sehr geringe Convergenz besitzen und sogar für jeden Wert von β erst bis zu einem, einem zugehörigen Werte von α, der mit wachsendem β gleichfalls rasch zunimmt, entsprechenden Maximalwerte ansteigen, so dass für höhere Werte von β die Convergenz der Reihen für A_β und B_β durch ihre Coëfficienten nicht mehr bedingt erscheint, sondern wesentlich von dem Werte des Bruches $\frac{2ek^2}{1-e}$ abhängt. Ist e sehr klein, dann wird auch noch $\frac{2e}{1-e}$ klein sein, und es werden selbst für grössere Werte von k^2 die Potenzen von $\frac{2e}{1-e}k^2$ noch schnell abnehmen. Für den Grenzfall $k=1$ dagegen gehören, falls der Bruch $\frac{2e}{1-e}$ grösser wird als die Einheit, die Reihen A'_β und B'_β des Zeichenwechsels ihrer Glieder wegen zu den semiconvergenten, deren Summe zwar nicht unendlich werden kann, für die sich aber auch ein bestimmter Wert nicht angeben lässt. Der Bruch $\frac{2e}{1-e}$ erreicht aber die Einheit für $e = 1/3$ oder $\varphi = 19^0\ 28'\ 16{,}2''$ und es geht somit aus dem Vorigen hervor, dass bei Excentricitäten in der Nähe dieses Wertes die Wal der Grösse k, d. h. der Separationspunkte nicht mehr eine ganz beliebige ist. Ob es nicht dennoch möglich sein würde durch Transformation der Reihen für A'_β und B'_β, die zu den hypergeome-

trischen gehören, diesen Uebelstand zu beseitigen, muss für jetzt, da hierzu eine weitgehende Untersuchung erfordert würde, unentschieden bleiben und kann es auch für den vorliegenden Zweck, da Excentricitäten von so hohem Werte unter den kleinen Planeten nur selten sind, und wie oben gezeigt, beide einer bestimmten Teilung entsprechenden Werte von k^2 gleichzeitig kleiner als $1/2$, also jeder von ihnen sicher klein genug erhalten werden kann, um im speciellen Falle eine expeditive Berechnung der Coëfficienten A'_β und B'_β zu gewährleisten.

Aus der Entwicklung von r erhält man unmittelbar die für $r \cos v$, denn es ist

$$r = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + e \cos v}, \quad \text{also } r \cos v = \frac{1}{e} (a \cos^2 \varphi - r).$$

Da aber hier e, also ein kleiner Bruch, in den Nenner tritt, so würde es für die praktische Rechnung vortheilhafter sein, erst $r \cos v$ zu entwickeln, und daraus die Entwicklung von r abzuleiten. Setzt man oben die Entwicklung von r ein, so erhält man

$$r \cos v = \frac{a \cos^2 \varphi}{1-e} \left(\frac{1-e}{e} - \frac{1}{e} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}{}' (-1)^\beta A_\beta \cos 2\beta\omega \right);$$

nimmt man den Factor $\frac{1}{e}$ in die Summe und in A_β mit hinein, so wird aus diesem Coëfficienten C_β, wo

$$C_\beta = \sum_{\alpha=\beta}^{\alpha=\infty} (-1)^\alpha S_\beta^{2\alpha} \left(\frac{2e k^2}{1-e} \right)^\alpha \frac{1}{e}$$

und somit

$$r \cos v = \frac{a \cos^2 \varphi}{1-e} \left(\frac{1-e}{e} - \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}{}' (-1)^\beta C_\beta \cos 2\beta\omega \right)$$

daraus würde sich dann die Entwicklung von r durch die Gleichung ergeben

$$r = a \cos^2 \varphi - er \cos v.$$

Da aber r allein weder für die Entwicklung des Quadrates der Entfernung noch ausserhalb desselben in den Störungsgleichungen erfordert wird, so hat man von dieser Gleichung keinen Gebrauch zu machen.

Für die Entwicklung von $\sin v$ wird die von $\sqrt{1 - k^2 \sin \omega}$ erfordert, für die von μdt diejenige von $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}}$. Die Herleitung der zugehörigen Coëfficienten ist von Hansen in der erwähnten Pariser Preisschrift gegeben worden, doch so, dass die Berechnung für jeden speciellen Wert von k immer wiederholt werden muss. Dieselben lassen sich jedoch in ähnlicher Weise wie oben analytisch herstellen, und es bedarf dann zur Anwendung auf den speciellen Fall nur der Multiplication von ein für allemal zu berechnenden Coëfficienten mit den fortschreitenden

Potenzen von k^2. Dieser Weg erscheint um so mehr gerechtfertigt, als mit wachsendem e die Werte der Model k und k_1 abnehmen, die Entwicklungen also convergenter werden; der Grund dafür aber, dass Hansen denselben nicht eingeschlagen, dürfte darin zu suchen sein, dass er später die Entwicklungen des allgemeineren Ausdruckes $(A + B \sin\omega + C \sin^2\omega)^{\frac{n}{2}}$ für $n = +1$ und -1 ausführt, wo dieser Weg unbequem wenn nicht unmöglich werden würde und daher für den speciellen Fall $A = 1$ $B = 0$ nicht eine andere Entwicklung wählen mochte.

Es ist

$$(1-k^2\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}(-1)^\alpha \frac{(-1)^{\alpha-1}(2\alpha-2)!}{2^{2\alpha-1}(\alpha-1)!\,\alpha!}\, k^{2\alpha}\sin^{2\alpha}\omega = -\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\frac{(2\alpha-2)!}{2^{2\alpha-1}(\alpha-1)!\,\alpha!}\, k^{2\alpha}\sin^{2\alpha}\omega$$

wo das Glied für $\alpha = 0$ gleich -1 zu setzen ist *).

Daraus

$$\sin v = 2k\,\sin\omega\,(1-k^2\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}} = -\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\frac{(2\alpha-2)!}{2^{2\alpha-2}(\alpha-1)!\,\alpha!}\, k^{2\alpha+1}\sin^{2\alpha+1}\omega\,.$$

Nach Einführung der Entwicklung von $\sin^{2\alpha+1}\omega$ nach Vielfachen von ω:

$$\sin^{2\alpha+1}\omega = \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha}(-1)^\beta S_\beta^{2\alpha+1}\sin(2\beta+1)\omega, \quad \text{wo } S_\beta^{2\alpha+1} = \frac{(2\alpha+1)!}{(\alpha+\beta+1)!\,(\alpha-\beta)!\,2^{2\alpha}}$$

erhält man somit

$$\sin v = -\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha}(-1)^\beta\,\frac{(2\alpha-2)!}{(\alpha-1)!\,\alpha!\,2^{2\alpha-2}}\, S_\beta^{2\alpha+1}\, k^{2\alpha+1}\sin(2\beta+1)\omega$$

oder nach Umkehrung der Reihenfolge der Summationen

$$\sin v = \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}(-1)^{\beta+1} D'_\beta \sin(2\beta+1)\omega$$

wo $$D'_\beta = \sum_{\alpha=\beta}^{\alpha=\infty} D_{\alpha\beta}\, k^{2\alpha+1}, \quad D_{\alpha\beta} = \frac{(2\alpha-2)!}{(\alpha-1)!\,\alpha!\,2^{2\alpha-2}}\, S_\beta^{2\alpha+1}$$ ist.

In analoger Weise erhält man die Entwicklung für das Product $r\sin v$. Multiplicirt man die Reihen

$$r = \frac{a\cos^2\varphi}{1-e}\sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty}(-1)^\gamma y^\gamma \sin^{2\gamma}\omega$$

und $$\sin v = -\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\frac{(2\alpha-2)!}{(\alpha-1)!\,\alpha!\,2^{2\alpha-2}}\, k^{2\alpha+1}\sin^{2\alpha+1}\omega$$

*) Eines besonderen Aviso wie früher der Strich oben am Summenzeichen bedarf es nicht, wenn man hier allgemein $(-n)! = \frac{(-1)^n}{n!}$ setzt.

miteinander, so wird

$$r \sin v = - \frac{a \cos^2 \varphi}{1-e} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} \frac{(-1)^\gamma y^\gamma (2\alpha-2)!}{(\alpha-1)!\,\alpha!\,2^{2\alpha-2}} k^{2\alpha+1} \sin^{2\gamma+2\alpha+1} \omega .$$

Setzt man für y seinen Werth $\frac{2 e k^2}{1-e}$, so erhält man

$$r \sin v = - \frac{a \cos^2 \varphi}{1-e} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} (-1)^\gamma \left(\frac{2e}{1-e}\right)^\gamma \frac{(2\alpha-2)!}{(\alpha-1)!\,\alpha!\,2^{2\alpha-2}} k^{2(\alpha+\gamma)+1} \sin^{2(\alpha+\gamma)+1} \omega .$$

Schreibt man jetzt δ für $\alpha+\gamma$, $\delta-\alpha$ für γ, so wird die Summe

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{\delta=\alpha}^{\delta=\infty} (-1)^{\delta-\alpha} \left(\frac{2e}{1-e}\right)^{\delta-\alpha} \frac{(2\alpha-2)!}{(\alpha-1)!\,\alpha!\,2^{2\alpha-2}} k^{2\delta+1} \sin^{2\delta+1} \omega ,$$

wofür man bei andrer Ordnung der Glieder erhält:

$$\sum_{\delta=0}^{\delta=\omega} (-1)^\delta E_\delta'' k^{2\delta+1} \sin^{2\delta+1} \omega ,$$

$$\text{wo } E_\delta'' = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\delta} (-1)^\alpha E_\alpha' \left(\frac{2e}{1-e}\right)^{\delta-\alpha}, \quad E_\alpha' = \frac{(2\alpha-2)!}{(\alpha-1)!\,\alpha!\,2^{2\alpha-2}} .$$

Führt man jetzt wieder den Ausdruck von $\sin^{2\delta+1} \omega$ durch die Vielfachen von ω ein, so geht die Summe über in

$$\sum_{\delta=0}^{\delta=\infty} \sum_{\beta=0}^{\beta=\delta} (-1)^{\delta+\beta} E_\delta'' S_\beta^{2\delta+1} k^{2\delta+1} \sin(2\beta+1)\omega$$

und es wird somit nach nochmaliger Vertauschung der Summenzeichen

$$r \sin v = \frac{a \cos^2 \varphi}{1-e} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} (-1)^{\beta+1} E_\beta \sin(2\beta+1)\omega, \text{ wo } E_\beta = \sum_{\delta=\beta}^{\delta=\infty} (-1)^\delta E_\delta'' S_\beta^{2\delta+1} k^{2\delta+1}$$

die E_δ'' aber dem Vorigen zufolge geschlossene Ausdrücke sind.

Um die Entwicklung von $\mu\, dt$ zu erhalten, hat man zunächst

$$r^2 = \frac{a^2 \cos^4 \varphi}{(1-e)^2} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} (-1)^\gamma (\gamma+1)\, y^\gamma \sin^{2\gamma} \omega$$

daher

$$\frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-e)^2} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} (-1)^\gamma (\gamma+1)\, y^\gamma \sin^{2\gamma} \omega = \frac{1+e}{1-e} \cos\varphi \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} (-1)^\gamma (+1) y^\gamma \sin^{2\gamma} \omega$$

ferner

$$[(1-k^2)\sin^2 \omega]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{(2\alpha)!}{(\alpha!)^2\, 2^{2\alpha}} k^{2\alpha} \sin^{2\alpha} \omega ,$$

somit

$$\mu\, dt = -2 \frac{1+e}{1-e} \cos\varphi\, k\, \cos\omega\, d\omega \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} (-1)^\gamma \frac{(\gamma+1)(2\alpha)!}{(\alpha!)^2\, 2^{2\alpha}} y^\gamma k^{2\alpha} \sin^{2\alpha+2\gamma} \omega .$$

Setzt man wieder für y seinen Werth $\frac{2e\,k^2}{1-e}$, so erhält man

$$\mu\,dt = -2\frac{1+e}{1-e}\cos\varphi\,k\cos\omega\,d\omega\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty}(-1)^{\gamma}\frac{(\gamma+1)(2\alpha)!}{(\alpha!)^2\,2^{2\alpha}}\left(\frac{2e}{1-e}\right)^{\gamma}k^{2(\alpha+\gamma)}\sin^{2(\alpha+\gamma)}\omega$$

oder wenn man wie oben δ für $\alpha+\gamma$, $\gamma=\delta-\alpha$ schreibt und die Glieder anders ordnet

$$\mu\,dt = -\frac{1+e}{1-e}\cos\varphi\,k\cos\omega\,d\omega\sum_{\delta=0}^{\delta=\infty}(-1)^{\delta}F_{\delta}''\,k^{2\delta}\sin^{2\delta}\omega$$

wo $$F''_{\delta}=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\delta}(-1)^{\alpha}F'_{\alpha}\left(\frac{2e}{1-e}\right)^{\delta-\alpha},\quad F'_{\alpha}=\frac{(\delta-\alpha+1)\,(2\alpha)!}{(\alpha!)^2\,2^{2\alpha-1}}.$$

Um nun $\mu\frac{dt}{d\omega}$ zu erhalten, hätte man mit $d\omega$ durchzudividiren, $\cos\omega$ unter das Summenzeichen zu nehmen und dann das Product $\cos\omega\sin^{2\beta}\omega$ durch die Vielfachen von ω auszudrücken, da aber auch das Integral von $\mu\,dt$ gebraucht wird, so ist es etwas bequemer $k\cos\omega\,d\omega = k\,d\sin\omega$ unter das Summenzeichen zu nehmen und sogleich die Integration auszuführen. Man erhält so

$$\mu\,t = c - \frac{1+e}{1-e}\cos\varphi\sum_{\delta=0}^{\delta=\infty}(-1)^{\delta}F''_{\delta}\,\frac{k^{2\delta+1}}{2\delta+1}\sin^{2\delta+1}\omega$$

wo c die Integrationsconstante bedeutet.

Nach Einführung des Ausdruckes für $\sin^{2\delta+1}\omega$ durch die Vielfachen von ω wird somit

$$\mu\,t = c - \frac{1+e}{1-e}\cos\varphi\sum_{\delta=0,\ \beta=0}^{\delta=\infty,\ \beta=\delta}(-1)^{\delta+\beta}F''_{\delta}\,S_{\beta}^{2\delta+1}\,\frac{k^{2\delta+1}}{2\delta+1}\sin(2\beta+1)\omega$$

oder $$\mu\,t = c - \frac{1+e}{1-e}\cos\varphi\sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}(-1)^{\beta}F_{\beta}\sin(2\beta+1)\omega,$$

wo $$F_{\beta}=\sum_{\delta=0}^{\delta=\infty}(-1)^{\delta}F_{\delta\beta}\,k^{2\delta+1},\quad F_{\delta\beta}=\frac{S_{\beta}^{2\delta+1}}{2\delta+1}F''_{\delta}$$

die einzelnen F''_{δ} aber wieder nach dem Vorigen geschlossene Ausdrücke sind.

Differenzirt man wieder nach ω, so wird schliesslich

$$\mu\frac{dt}{d\omega} = \frac{1+e}{1-e}\cos\varphi\sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}(-1)^{\beta+1}G_{\beta}\cos(2\beta+1)\omega$$

wo $$G_{\beta}=\sum_{\delta=\beta}^{\delta=\infty}(-1)^{\delta}\,G_{\delta\beta}\,k^{2\delta+1}\qquad G_{\delta\beta}=(2\beta+1)\,F_{\delta\beta}.$$

Hiermit sind die Entwicklungen sowohl der das Quadrat der Entfernung constituirenden als auch der ausserhalb desselben in den Störungsgleichungen enthaltenen Glieder, die unabhängig vom störenden Körper sind, für den oberen Teil der Bahn erledigt und die analogen für den unteren Teil können nunmehr kurz gefasst werden.

Aus der Gleichung für

$$r = a(1 - e + ek^2) - aek^2 \cos 2\omega = a(1 - e + 2ek^2 \sin^2 \omega$$

erhält man unmittelbar durch Quadriren:

$$r^2 = a^2((1 - e)^2 + 4(1 - e)ek^2 \sin^2 \omega + 4e^2 k^4 \sin^4 \omega)$$

und indem man $\sin^2 \omega$ und $\sin^4 \omega$ durch die Cosinus der Vielfachen von ω ausdrückt

$$r^2 = a^2 \left(1 - 2e\left(1 - k^2\right) + e^2\left(1 - \tfrac{1}{2}k^2\right) - 2ek^2 \cos 2\omega + \frac{e^2 k^2}{2} \cos 4\omega\right),$$

einen zwar unsymmetrischen aber geschlossenen Ausdruck. Der Ausdruck für $r \cos v$ hat bereits die verlangte Form und ist ebenfalls geschlossen, die Entwicklung von $r \sin v$ aber wird unmittelbar aus der für $\sin v$ im oberen Teile durch Multiplication mit dem Factor $a \cos \varphi$ erhalten:

$$r \sin v = a \cos \varphi \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} (-1)^{\beta+1} D'_\beta \sin(2\beta + 1)\omega.$$

Ebenso resultirt die Entwicklung von $\frac{1}{r}$ aus der für r im oberen Teile durch blosse Multiplication mit dem Factor $\frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi}$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e)} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}{}' (-1)^\beta A'_\beta \cos 2\beta\omega$$

und aus dieser folgt sofort wieder die für $\cos v$ aus der Gleichung:

$$\cos v = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{a \cos^2 \varphi}{r}\right)$$

nämlich

$$\cos v = \frac{1}{e} - \frac{\cos^2 \varphi}{1 - e} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} (-1)^\beta C_\beta \cos 2\beta\omega.$$

Auch die Entwicklung von $\sin v$ kann aus der für $r \sin v$ im oberen Teil durch einfache Multiplication mit $\frac{1}{a \cos \varphi}$ erhalten werden.

$$\sin v = \frac{\cos \varphi}{1 - e} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} (-1)^{\beta+1} E_\beta \sin(2\beta + 1)\omega.$$

Etwas abweichend dagegen gestalten sich die für $\mu \frac{dt}{d\omega}$ und μt. Bei Betrachtung der Störungsgleichungen zeigt es sich überdies, dass es zweckmässig ist, auch die Entwicklungen von $\mu \frac{a}{r} \frac{dt}{d\omega}$ und von $\mu \frac{a^2}{r^2} \frac{dt}{d\omega}$ noch anzuschliessen, wobei dann die oben gegebene Entwicklung von $\frac{1}{r}$ nur den Charakter einer Hilfsgleichung erhält, selbst aber nicht zur Verwendung kommt, und auch die Entwicklungen von $\cos v$ und $\sin v$ wieder überflüssig werden.

Es ist im unteren Teile:

$$\mu \frac{a}{r} \frac{dt}{d\omega} = \frac{2k \cos \omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}}.$$

Multiplicirt man die Gleichung:

$$(1 - k^2 \sin^2 \omega)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{(2\alpha)!}{(\alpha!)^2 2^{2\alpha}} k^{2\alpha} \sin^{2\alpha} \omega$$

mit $k \cos \omega \, d\omega = k \, d \sin \omega$ und integrirt, so wird:

$$\int \mu \frac{a}{r} dt = c + 2 \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{(2\alpha)!}{(2\alpha+1)(\alpha!)^2 2^{2\alpha}} k^{2\alpha+1} \sin^{2\alpha+1} \omega$$

$$= c + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha} (-1)^\beta \frac{(2\alpha!)^2}{(\alpha+\beta+1)!\,(\alpha-\beta)!\,(\alpha!)^2 2^{4\alpha-1}} k^{2\alpha+1} \sin(2\beta+1)\omega$$

oder wenn man wieder nach ω differenzirt:

$$\mu \frac{a}{r} dt = \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} (-1)^\beta H_\beta \cos(2\beta+1)\omega,$$

wo $$H_\beta = \sum_{\alpha=\beta}^{\alpha=\infty} H_{\alpha\beta} k^{2\alpha+1}, \qquad H_{\alpha\beta} = \frac{(2\alpha!)^2 (2\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)!\,(\alpha-\beta)!\,(\alpha!)^2 2^{4\alpha-1}}.$$

Analog erhält man durch Multiplication von

$$(1 - k^2 \sin^2 \omega)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{(2\alpha)!}{(\alpha!)^2 2^{2\alpha}} k^{2\alpha} \sin^{2\alpha} \omega$$

mit $$\frac{r}{a} = (1-e)\left(1 + \frac{2e}{1-e} k^2 \sin^2 \omega\right) = (1-e) \sum_{\beta=0}^{\beta=1} \left(\frac{2e}{1-e}\right)^\beta k^{2\beta} \sin^{2\beta} \omega$$

$$\mu \frac{dt}{d\omega} = 2(1-e) k \cos \omega \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{\beta=0}^{\beta=1} \frac{(2\alpha)!}{(\alpha!)^2 2^{2\alpha}} \left(\frac{2e}{1-e}\right)^\beta k^{2(\alpha+\beta)} \sin^{2(\alpha+\beta)} \omega.$$

Setzt man dann $\alpha + \beta = \delta$, $\alpha = \delta - \beta$ so wird

$$\mu \frac{dt}{d\omega} = (1-e) k \cos \omega \sum_{\delta=0}^{\delta=\infty} \sum_{\beta=0}^{\beta=1} \frac{(2\delta - 2\beta)!}{[(\delta-\beta)!]^2 2^{2(\delta-\beta)-1}} \left(\frac{2e}{1-e}\right)^\beta k^{2\delta} \sin^{2\delta} \omega$$

$$= \sum_{\delta=0}^{\delta=\infty} L'''_\delta k^{2\delta} \sin^{2\delta} \omega$$

$$L'''_\delta = \sum_{\beta=0}^{\beta=1} \frac{(2\delta-2\beta)!}{[(\delta-\beta)!]^2 2^{2(\delta-\beta)-1}} \left(\frac{2e}{1-e}\right)^\beta = L''_\delta + \frac{2e}{1-e} L''_{\delta-1}, \text{ wo } L''_\delta = \frac{(2\delta)!}{(\delta!)^2 2^{\delta-1}}$$

für $\delta = 0$ das zweite Glied aber in Wegfall kommt.

Daraus analog dem Früheren

$$\mu t = c + (1 - e) \sum_{\delta=0}^{\delta=\infty} L'_\delta k^{2\delta+1} \sin^{2\delta+1} \omega, \quad \text{wo } L'_\delta = \frac{L''_\delta}{2\delta+1}$$

oder $$\mu t = c + (1 - e) \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} (-1)^\beta L_\beta \sin (2\beta + 1) \omega,$$

$$\text{wo } L_\beta = \sum_{\delta=\beta}^{\delta=\infty} L'_\delta S_\beta^{2\delta+1} k^{2\delta+1}$$

und $$\mu \frac{dt}{d\omega} = (1 - e) \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} (-1)^\beta M_\beta \cos (2\beta + 1) \omega, \text{ wo } M_\beta = \sum_{\delta=\beta}^{\delta=\infty} L'_\delta S_\beta^{2\delta+1} k^{2\delta+1}.$$

Ebenso ergiebt sich durch dasselbe Verfahren

$$\mu \frac{a^2}{r^2} \frac{dt}{d\omega} = \frac{1}{1-e} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} (-1)^\beta N_\beta \cos (2\beta + 1) \omega, \text{ wo } N_\beta = \sum_{\delta=\beta}^{\delta=\infty} (-1)^\delta N_{\beta\delta} k^{2\delta+1},$$

$$N_{\beta\delta} = (2\beta + 1) N''_\delta \frac{S^{2\delta+1}}{2\delta+1}, \quad N''_\delta = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\delta} (-1)^\alpha L''_\alpha \left(\frac{2e}{1-e}\right)^{\delta-\alpha}.$$

Diese an sich sehr einfachen Herleitungen sind deshalb hier so ausführlich durchgeführt worden, um einesteils, wenn die von den Bahnelementen unabhängigen Coëfficienten erst einmal tabulirt sind, unmittelbar zur praktischen Anwendung dienen zu können, andererseits aber auch, um ein Urteil gewinnen zu können, ob nicht etwa schon hier den Gyldén'schen Entwicklungen mit Hilfe der elliptischen Functionen der Vorzug einzuräumen wäre.

(Wird fortgesetzt.)

VITA.

Paulus Arnoldus Leman, Vratislaviensis natus die V mensis Julii anni MDCCCLI, patre Eduardo, matre Anna e gente Trautmann, confessioni addictus evangelicae primis litteris imbutus sum in schola primi ordinis reali Vratislaviae quae dicitur „am Zwinger“ cui praeerat C. A. Kletke.

Ac primum quidem cum omnes classes absolvissem rebus studui technicis tres per annos in schola technica Berolinensi quo tempore viros praeclaros Christoffel, Aronhold mathematicos, physicos Quincke et Paalzow, geodaetam Boersch audivi, tum autem amore mathematicae et astronomiae adductus anno MDCCCLXXIV numero civium universitatis hujus Berolinensis adscribi me curavi. Lectionibus adfui virorum clarissimorum Weierstrass, Foerster, Tietjen, Hoppe, Kronecker, Dove, Kirchhoff, quibus omnibus gratias ago quam maximas.

Eodem tempore et computationes pro annalibus peregi astronomicis et in instituto „Kaiserliche Normal-Eichungs-Kommission“ laboribus metronomicis occupatus sum, necnon tria per semestra in exercitationibus seminarii astronomici sum versatus.

THESEN.

1) Das Princip der Partition ist im einzelnen Falle immer nur auf einen der beiden in Betracht gezogenen Himmelskörper anwendbar.

2) Durch die von Gyldén in Vorschlag gebrachte Art der Einführung elliptischer Functionen werden für die Ermittlung der absoluten Störungen der kleinen Planeten wesentliche Vorteile nicht erzielt.

3) Das Hansensche Verfahren zur Bestimmung der Teilungsfehler geradliniger Maſsstäbe ist nur bei beschränkter Anzal von Teilstrichen zu empfehlen.

4) Die von Regnault für die Dichte von Gasen gewälte Einheit, das Gewicht eines Liters atmosphärischer Luft, unterliegt principiellen Bedenken.